

۱. فرض کنید تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی به مقدار لازم مشتق پذیر و $p_0 \in \mathbb{R}^3$ نقطه‌ای مشخص است. همچنین:

$$(f, f_x, f_y, f_z, f_{xy}, f_{xz}, f_{yz}, f_{zz})_{p_0} = (1, 2, -1, 1, 2, -1, 1, 1)$$

الف. معادله صفحه مماس بر مجموعه $f = 1$ در نقطه p_0 را بنویسید.

ب. نشان دهید $f = 1$ در همسایگی p_0 به صورت نمودار تابعی مانند $z = h(x, y)$ است و z_y, z_{xy} را برای آن در نقطه متناظر با p_0 حساب کنید.

ج. آیا بیشترین مقدار تابع $g(x, y, z) = x^5 + y^3 + z$ روی مجموعه $f = 1$ می‌تواند در نقطه p_0 اتخاذ شود؟

۲. مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را که درون استوانه $x^2 + y^2 = y$ قرار دارد پیدا کنید.

۳. میدان هموار زیر را روی صفحه منهای مبدأ در نظر بگیرید.

$$F(x, y) = f(x, y)(-y, x) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$$

الف. نشان دهید F موضعاً پایدار است اگر و تنها اگر برای همه نقاط خارج مبدأ داشته باشیم:

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = -2f(x, y)$$

ب. نشان دهید اگر تابع f همگن مرتبه -2 باشد (یعنی برای همه نقاط خارج مبدأ و $t > 0$ داشته باشیم

$$f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$$

(در واقع می‌توان نشان داد این دو معادل اند)

ج. اگر $f(x, y) = (x^2 + 4y^2)^{-1}$ انتگرال میدان F را روی دایره واحد و در جهت مثلثاتی محاسبه کنید.

(راهنمایی: ابتدا انتگرال این میدان را روی بیضی $x^2 + 4y^2 = 1$ محاسبه کنید).

۴. فرض کنید $g(u, v)$ تابعی هموار باشد و قرار دهید

$$G(x, y, z) = (zg_v(zy, x) + x, z^2g_u(zy, x) + x, g(zy, x) + zyg_u(zy, x))$$

الف. $\text{curl } G$ را محاسبه کنید.

ب. اگر D ناحیه‌ای مسطح در $\mathbb{R}^3$ با مساحت A و بردار نرمال N باشد $\int_{\partial D} G \cdot dr$ را حساب کنید.

ج. انتگرال $\int_C G \cdot dr$ را برای خم C با پرمایش زیر محاسبه کنید. (راهنمایی: G جمع یک میدان پایستار با یک میدان ساده است.)

$$\gamma(t) = (at, \cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$