



دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

بزرگترین سایت ریاضی

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

<http://IRmath.com>



صبح جمعه

۹۱/۱۲/۱۸

دفترچه شماره ۱

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دوره‌های دکتری (نیمه متمرکز) داخل
در سال ۱۳۹۲

رشته‌ی
مجموعه ریاضی - ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (انالیز ریاضی ۱، جبر خطی، جبر ۱، جبر پیچیده، انالیز حقیقی ۱)	۴۵	۱	۴۵

IRmath
سایت ریاضیات ایران

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

- ۶ فرض کنید G گروهی متناهی بوده و به ازای هر دو زیر گروه دلخواه K و H داشته باشیم $K \subseteq H$ یا $K \subseteq H$ ، در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟
- (۱) G لزوماً دوری نیست.
 - (۲) G حاصلضرب دکارتی دو گروه دوری است.
 - (۳) G فقط دو زیرگروه دارد.
 - (۴) G دوری است و مرتبه G توانی از یک عدد اول است.

- ۷- فرض کنید G یک گروه بوده که دارای زیر گروه ماکسیمال متناهی است. کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) G متناهی است.
 - (۲) G با تولید متناهی است.
 - (۳) هر کلاس تزویجی G متناهی عضو دارد.
 - (۴) G دارای یک زیر گروه اندیس متناهی است.

- ۸- فرض کنید G گروهی از مرتبه p^n باشد که p عددی اول است. اگر H زیرگروهی از G از مرتبه p^{n-2} باشد که H در G نرمال نیست آنگاه کدام گزینه نادرست است؟
- (۱) $Z(G) \subseteq N_G(H)$
 - (۲) $G' \subseteq N_G(H)$
 - (۳) $N_G(H)$ زیرگروه نرمال G است.
 - (۴) $|G : N_G(H)| = p$

- ۹- فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار است ولی میدان نیست و P یک ایده‌آل ماکسیمال R است. فرض کنید $I = P[x]$ یک ایده‌آل حلقه چند جمله‌ایهای $R[x]$ باشد که شامل همه چند جمله‌ای‌های واقع در $R[x]$ است که ضرایب آنها در P است. کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) I یک ایده‌آل ماکسیمال $R[x]$ است ولی اول نیست.
 - (۲) I یک ایده‌آل اول $R[x]$ است که ماکسیمال نیز می‌باشد.
 - (۳) I یک ایده‌آل اول $R[x]$ است ولی ماکسیمال نیست.
 - (۴) I نه ایده‌آل اول $R[x]$ است و نه ایده‌آل ماکسیمال $R[x]$

- ۱۰- اگر π یک ترانهش در گروه متقارن S_n ، $n \geq 2$ ، فرض شود آنگاه $C_{S_n}(\pi)$ با کدام گروه زیر یکرخت است؟
- (۱) S_{n-2}
 - (۲) S_{n-1}
 - (۳) $\mathbb{Z}_2 \times S_{n-2}$
 - (۴) $\mathbb{Z}_2 \times S_{n-1}$

۱۱- با فرض آنکه $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، کدام یک از ضوابط ذیل یک نرم بر $\mathbb{R}^2$ تعریف نمی کند؟

$$\|z\| = \|x\| + \|y\| \quad (1)$$

$$\|z\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^r \quad (r$$

$$\|z\| = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (r)$$

$$\|z\| = \left(|x|^r + |y|^r \right)^{1/r} \quad (r)$$

۱۲- در فضای متریک (X, d) نقطه $p \in X$ یک نقطه تراکم E است هر گاه هر همسایگی p مجموعه E را در نا شمارا نقطه قطع

کند. در $\mathbb{R}^k$ با متریک اقلیدسی اگر E ناشمارا و F مجموعه نقاط تراکم E باشد آنگاه :

(۷) F ناشمار است.

۵) $E \cap F$ فاشم راست.

(۳) F کامل است. (یعنی $F' = F$).

(۴) همه موارد صحتیح است.

۱۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر نمی‌تواند مجموعه حدود زیر دنباله‌ای یک دنباله حقیقی باشد؟

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\} \quad (1)$$

$\mathbb{Z}(\pi)$

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cap \mathcal{C}$$

(۴) گزینه‌های (۲) و (۳) صحیح‌اند.

۱۴- فرض کنید $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ و تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \inf\{|y - x|: y \in A\}$ تعریف شود. در صورتی

که K مجموعه نقاطی باشد که تابع f در آن نقاط مشتق پذیر نیست، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) هر نقطه K ، نقطه‌ای تنها در K است.

(۲) K بسته است ولی فشردده نیست.

(5) K نىستە قىلىنىدۇ.

(۴) K فشار ده ایست.

دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

بزرگترین سایت ریاضی

۱۵- فرض کنید $f(x)$ بر بازه $[0, 1]$ کراندار باشد و برای $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$ که $a, b > 1$ در رابطه $f(ax) = bf(x)$ صدق کند. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{b}$
 (۲) $\frac{b}{a}$
 (۳) $f(0)$
 (۴) ۱

۱۶- اگر تابع $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ صعودی و از راست پیوسته باشد و برای هر

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \right\}, E \subseteq \mathbb{R}$$

آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

(۱) برای هر مجموعه بورل E ، $\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\}$

(۲) برای هر مجموعه بورل E ، $\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}$

(۳) اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\mu(\{x\}) = 0$ ، آن گاه F روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

(۴) اگر F روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد آن گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\mu(\{x\}) = 0$.

۱۷- اگر μ^* اندازه ای خارجی روی X ، $A \subseteq X$ و A^c متمم A باشد، آنگاه حکم $\mu^*(B \cup C) = \mu^*(B) + \mu^*(C)$ برای هر

$$B \subseteq A \text{ و } C \subseteq A^c$$

(۱) از اندازه پذیری A نسبت به μ^* قوی تر است ولی با آن معادل نیست.

(۲) از اندازه پذیری A نسبت به μ^* ضعیف تر است ولی با آن معادل نیست.

(۳) با اندازه پذیری A نسبت به μ^* معادل است.

(۴) با اندازه پذیری A نسبت به μ^* ارتباطی ندارد.

۲۳- فرض کنید (X, M, μ) یک فضای اندازه و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار در $L^1(\mu)$ باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر درست نیست؟

(۱) اگر تقریباً همه جا $0 \leq f_n$ و $f_n \uparrow f$ تقریباً همه جا، آن‌گاه $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu$

(۲) فرض کنید $g \in L^1(\mu)$ موجود باشد به طوری که برای هر n ، تقریباً همه جا $|f_n| \leq g$. در این صورت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در اندازه همگراست اگر و تنها اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در نرم $L^1(\mu)$ همگرا باشد.

(۳) اگر $\mu(X) < +\infty$ و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در اندازه همگراست اگر و تنها اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در نرم $L^1(\mu)$ همگرا باشد.

(۴) اگر تقریباً همه جا $f_n \geq 0$ و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در اندازه همگرا به f باشد آن‌گاه $\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu$.

۲۴- فرض کنید f تابعی انتگرال پذیر (حقیقی مقدار) روی فضای اندازه (X, M, μ) باشد و $\lambda > 0$ و $E_n = \{x \in X : f(x) \geq n\lambda\}$ ($n \geq 1$) کدام گزینه صحیح است؟

دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

بزرگترین سایت ریاضی

<http://IRmath.com>

@IRmath

۲۵- فرض کنید $f \in L^1(\mathbb{R})$ و $a > 0$. کدام گزینه درست نیست؟ (m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ است)

(۱) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_c^a \left| f\left(n + \frac{x}{a}\right) \right| dm(x) = a \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dm(x)$

(۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(n + \frac{x}{a}\right) \right|$ تقریباً برای هر x همگراست.

(۳) اگر f کراندار نباشد آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \int_{-\infty}^{\infty} |f(nx)| dm(x) = \infty$

(۴) $\lim_{n \rightarrow -\infty} n^{-a} f(nx) = 0$ تقریباً برای هر x .

۲۶- اگر $C[a, b]$ ، $C^1[a, b]$ و $P[a, b]$ به ترتیب فضای توابع پیوسته، توابع به طور پیوسته مشتق پذیر و چند جمله‌ای‌ها روی $[a, b]$ باشد، کدام گزاره صحیح است؟

(۱) $C[a, b]$ در $L^1[a, b]$ چگال است ولی $C^1[a, b]$ و $P[a, b]$ چگال نیستند.

(۲) $C[a, b]$ و $C^1[a, b]$ در $L^1[a, b]$ چگال اند ولی $P[a, b]$ چگال نیست.

(۳) هیچ یک در $L^1[a, b]$ چگال نیست.

(۴) هر سه فضا در $L^1[a, b]$ چگال اند.

۲۷- فرض کنید f و g توابعی انتگرال پذیر و حقیقی - مقدار روی فضای اندازه (X, M, μ) باشند. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $fg \in L^1(\mu)$

(۲) $(f^2 + g^2)^{\frac{1}{2}} \in L^1(\mu)$

(۳) $fg \in L^1(\mu)$

(۴) هیچکدام

۲۸- فضاهای $X = C[0, 1]$ و $Y = C^1[0, 1]$ (توابع مشتق پذیر با مشتق پیوسته) را با نرم سوپریم در نظر بگیرید. فرض کنید $Z = \{f \in Y : f(0) = 0\}$ و $T : X \rightarrow Z$ با ضابطه ذیل تعریف شود. کدام گزینه صحیح است؟

$$Tf(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(۱) T پیوسته و دوسویی است ولی وارون آن پیوسته نیست.

(۲) T دو سویی است ولی پیوسته نیست.

(۳) T پیوسته است ولی دوسویی نیست.

(۴) T پیوسته و دوسویی است و وارون آن پیوسته است.

۲۹- فضای ضرب داخلی $X = C[-1, 1]$ را با ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f \bar{g} dt$ در نظر بگیرید. فرض کنید

$M = \{f \in X : f(t) = 0 \text{ } (-1 \leq t \leq 0)\}$ در مورد مجموعه های $M^{\perp}$ و $M \oplus M^{\perp}$ چه می توان گفت؟ که در آن برای هر زیر فضای N از X ، $N^{\perp} = \{f \in X : \langle f, g \rangle = 0, g \in N\}$.

(۱) $M \oplus M^{\perp} = X$ و $M^{\perp\perp} = M$

(۲) $M \oplus M^{\perp} \neq X$ ولی $M^{\perp\perp} = M$

(۳) $M^{\perp\perp} \neq M$ ولی $M \oplus M^{\perp} = X$

(۴) $M \oplus M^{\perp} \neq X$ و $M^{\perp\perp} \neq M$

۳۰- فرض کنید برای ℓ^1 و $x = \{x_n\} \in \ell^1$ و $\|x\| = \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$ (توجه کنید که ℓ^1 معمولاً با نرم $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ در نظر

گرفته می شود). در این صورت:

(۱) $\|\cdot\|$ در نامساوی مثلث صدق نمی کند، پس یک نرم نیست.

(۲) $\|\cdot\|$ با $\|\cdot\|_1$ معادل است.

(۳) فضای $(\ell^1, \|\cdot\|)$ نرم دار است ولی باناخ نیست.

(۴) فضای $(\ell^1, \|\cdot\|)$ باناخ است ولی $\|\cdot\|$ با $\|\cdot\|_1$ معادل نیست.

- ۳۱- فرض کنید M یک R - مدول متناهی مولد باشد. کدام گزینه درست است؟
- (۱) هر زیر مدول M متناهی مولد است.
 - (۲) هر مدول خارج قسمتی M متناهی مولد است.
 - (۳) M یک R - مدول نوتری است.
 - (۴) M یک R - مدول آرتینی است.
- ۳۲- کدام یک در مورد $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ - مدول صحیح است؟
- (۱) آرتینی و نوتری نیست.
 - (۲) آرتینی است ولی نوتری نیست.
 - (۳) نوتری است ولی آرتینی نیست.
 - (۴) هم نوتری است و هم آرتینی است.
- ۳۳- گروه $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q} \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty})$ با کدام گروه زیر یکرخت است؟
- (۱) $\mathbb{Q}$
 - (۲) $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$
 - (۳) $\mathbb{Z}_{p^\infty}$
 - (۴) $\mathbb{Z}$
- ۳۴- کدام گزینه در مورد تعداد جواب‌های معادله $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{12} = \frac{n}{4}$ درست است؟
- (۱) یک جواب دارد.
 - (۲) جواب ندارد.
 - (۳) دو جواب دارد.
 - (۴) بینهایت جواب دارد.
- ۳۵- فرض کنید F یک میدان است، آنگاه $F[x]$ به عنوان یک $F[x]$ مدول دارای کدام خاصیت زیر است؟
- (۱) آرتینی است و نوتری نیست.
 - (۲) نوتری و آرتینی نیست.
 - (۳) نوتری است و آرتینی نیست.
 - (۴) نوتری و آرتینی است.
- ۳۶- کدام یک از حلقه‌های زیر نیمه ساده هستند؟
- (۱) $\mathbb{Z}_{16}$
 - (۲) $\mathbb{Z}_{18}$
 - (۳) $\mathbb{Z}_{20}$
 - (۴) $\mathbb{Z}_{30}$

- ۳۷- فرض کنید M یک R - مدول باشد، اگر $\text{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid rx = 0, \forall x \in M\}$ آنگاه $\text{Ann}_R(M)$:
 (۱) یک ایده آل دو طرفه R است.
 (۲) فقط ایده آل چپ R است.
 (۳) فقط ایده آل راست R است.
 (۴) ایده آل R نیست.

- ۳۸- فرض کنید R حلقه ماتریس های بالا مثلثی مرتبه n با درآیه های حقیقی باشد، در این صورت رادیکال جیکوبسن R کدام یک از مجموعه های زیر است؟
 (۱) $\{0\}$

- (۲) تمام ماتریس های بالامثلثی که دترمینان آن ها صفر است.
 (۳) تمام ماتریس های بالامثلثی که تریس (رد) آنها صفر است.
 (۴) تمام ماتریس های بالامثلثی که درآیه های روی قطر آن ها صفرند.

- ۳۹- فرض کنید $R = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و M یک R - مدولی با تولید متناهی و $I = \{(a, 0, 0) : a \in \{0, 5, 10, 15, 20\}\}$ چنانچه $IM = M$ داریم:

(۱) $|\text{Ann}_R(M)| = 5$

(۲) $M = \{0\}$

(۳) $\text{Ann}_R(M) = \{0\}$

(۴) M یک R - مدول نامتناهی است.

دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

- ۴۰- فرض کنید R حلقه ای آرئینی چپ باشد و مجموعه یکال های آن متناهی باشد، کدام گزینه صحیح است؟
 (۱) $J(R)$ متناهی است.

(۲) حلقه R نامتناهی است.

(۳) گروه یکال های R آبلی است.

(۴) گروه یکال های R دوری است.

<http://IRmath.com>

@IRmath

- ۴۱- کدام یک از احکام زیر نادرست است؟

- (۱) هر جمعونند مستقیم یک مدول ائوکتیو (توزیقی)، ائوکتیو است.
 (۲) هر جمعونند مستقیم یک مدول تصویری، تصویری است.
 (۳) هر جمعونند مستقیم یک مدول آزاد، آزاد است.
 (۴) هر جمعونند مستقیم یک مدول آزاد، تصویری است.

- ۴۲- فرض کنید f یک حلقه و I ایده آلی از آن که $I \subseteq J(R)$ و N یک R - مدول با تولید متناهی، اگر $f : M \rightarrow N$ یک R مدول همبندی و $\bar{f} : \frac{M}{IM} \rightarrow \frac{N}{IN}$ که $\bar{f}(m + IM) = f(m) + IN$ ، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $\bar{f}$ ممکن است خوش تعریف نباشد.

(۲) اگر $\bar{f}$ یک به یک باشد f نیز یک به یک است.

(۳) اگر $\bar{f}$ یکریختی باشد f نیز چنین است.

(۴) اگر $\bar{f}$ پوشا باشد f نیز پوشاست.

۴۳- کدام یک از گروه‌های آبدلی به عنوان $\mathbb{Z}$ -مدول انژکتیو (تزریق) نیستند؟

(۱) $\mathbb{R}$

(۲) $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

(۳) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Q}$

(۴) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$

۴۴- فرض کنید G گروهی آزاد و آبدلی است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) G با حاصل ضربی از گروه‌های نامتناهی یکریخت است.

(۲) G گروهی دوری و نامتناهی است.

(۳) G حاصل ضرب تعدادی گروه آبدلی متناهی و گروه $\mathbb{Z}$ است.

(۴) G گروهی دوری و متناهی است.

۴۵- اگر $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{C}^*$ به ترتیب گروه‌های ضربی اعداد حقیقی ناصفر و اعداد مختلط ناصفر باشند، آنگاه $\text{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{R}^* \oplus \mathbb{C}^*)$ با کدام گروه یکریخت است؟

(۱) $\mathbb{Q}$

(۲) $\mathbb{Z}_6$

(۳) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$

(۴) $\mathbb{Z}_{12}$