

315

D



دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

بزرگترین سایت ریاضی

<http://IRmath.com>

@IRmath

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

صبح جمعه

۹۳/۱۲/۱۵

دفترچه شماره ۱ از ۲



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.

امام خمینی (ره)

آزمون ورودی دوره های دکتری (نیمه متمرکز) داخل - سال ۱۳۹۴

ریاضی محض
(کد ۲۲۳۳)

IRmath

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - جبر خطی - جبر ۱ - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی ۱)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفند ماه - سال ۱۳۹۳

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

۱- در مورد سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) سری همگرای مطلق است.
- (۲) سری همگرای مشروط است.
- (۳) مجموع جزئی سری کران دار است ولی واگراست.
- (۴) مجموع جزئی سری بی کران است.

۲- به ازای $a > 0$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{n+1} + \frac{a^{\frac{2}{n+1}}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{a^{\frac{n}{n+1}}}{n+\frac{1}{n}} \right)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{\ln a}$
- (۲) $\frac{a-1}{\ln a}$
- (۳) $\frac{a}{\ln a}$
- (۴) $\frac{a+1}{\ln a}$

۳- فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ فشرده و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد که برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، مجموعه $f^{-1}(t, \infty)$ بسته است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x) < \infty$.
- (۲) ممکن است تابع f سوپرمم و اینفیمم خود را بر X نگیرد.
- (۳) $y_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $f(y_0) = \inf_{x \in X} f(x) > -\infty$.
- (۴) f کران دار است.

۴- اگر $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر باشند و $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ تعریف شده باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $f(a) = g(a)$ آنگاه h در a مشتق پذیر است.

(۲) اگر h در a مشتق پذیر باشد آنگاه $f(a) \neq g(a)$

(۳) اگر $f(a) \neq g(a)$ آنگاه h در a مشتق پذیر است.

(۴) اگر h در a مشتق پذیر باشد آنگاه $g'(a) = f'(a)$

۵- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ پیوسته و انتگرال ریمان ناسره $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ همگرا باشد. مقدار

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n x f(x) dx$$

(۱) صفر

(۲) $+\infty$

(۳) ۱

(۴) موجود نیست.

۶- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $f: X \rightarrow X$ تابعی پیوسته باشد به طوری که به ازای هر دو عضو متمایز x و y در X ، $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر X فشرده باشد آنگاه f نقطه ثابت دارد.

(۲) ممکن است f نقطه ثابت نداشته باشد.

(۳) اگر $x_0 \in X$ وجود داشته باشد که $\{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ نقطه حدی داشته باشد، آنگاه f نقطه ثابت دارد $(f^n = f \circ f \circ \dots \circ f)$.

(۴) اگر X فشرده باشد، آنگاه ثابت $0 < \alpha < 1$ وجود دارد که به ازای هر دو نقطه x و y در X داریم $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$

۷- نقیض گزاره زیر کدام است؟

دنباله توابع حقیقی $\{f_n\}$ بر مجموعه X به طور یکنواخت به تابع f میل می کند. ($0 < \varepsilon$ و $n, N \in \mathbb{N}$ فرض شده اند).

$$(1) \forall \varepsilon \forall N \exists n \exists x (x \in X \& n \geq N \& |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

$$(2) \exists \varepsilon \forall N \exists n \exists x (x \in X \& n \geq N \& |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

$$(3) \exists \varepsilon \forall N \forall n \exists x (x \in X \& n \geq N \& |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

$$(4) \exists \varepsilon \exists N \exists n \forall x (x \in X \& n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

۸- فرض کنید تابع $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{n}, (m,n)=1, (p,n)=1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف شده باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x,y) dx dy = 1 \quad (1)$$

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x,y) dx dy = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y) dy \right] dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y) dy \right] dx = 1 \quad (4)$$

۹- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر ریمان بر بازه $[a,b]$ باشد و دنباله توابع $\{F_n\}$ بر $[a,b]$ باضابطه $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ تعریف شود. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟(۱) اگر دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت همگرا به صفر باشد آنگاه $\{F_n\}$ هم یکنواخت همگرا به صفر است(۲) اگر دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کران‌دار باشد آنگاه $\{F_n\}$ یک زیر دنباله یکنواخت همگرا دارد.(۳) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته و یکنواخت همگرا باشد، آنگاه دنباله $\{F_n\}$ یکنواخت همگرا به تابعی است که لزوماً به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نیست.(۴) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای نزولی از توابع پیوسته و نقطه‌وار همگرا به صفر باشد، آنگاه دنباله $\{F_n\}$ یکنواخت همگرا به صفر است.

دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

بزرگترین سایت ریاضی

<http://IRmath.com>

@IRmath

- ۱۰- فرض کنید A یک ماتریس 3×3 وارون پذیر با درایه‌های واقع در میدان F باشد. اگر $\det(A) = 1$ و $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^{-1}) = 0$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $A^5 = I$

(۲) $A^2 = I$

(۳) $A^3 = I$

(۴) $A^4 = I$

- ۱۱- اگر A ماتریسی 3×3 باشد و مقادیر ویژه آن یک تصاعد حسابی با قدر نسبت مثبت تشکیل دهند به فرض اینکه $\text{tr}(A) = 9$ و $\det(A) = -21$ ، آنگاه بزرگترین مقدار ویژه عبارت است از:

(۱) ۴

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

- ۱۲- فرض کنید A یک ماتریس 4×4 با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که $A^2 + 2A + 3I = 0$ ، در این صورت $\text{tr}(A^{-1})$ برابر است با:

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) $-\frac{4}{3}$

- ۱۳- فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_{20} \in M_{10}(\mathbb{R})$ ماتریس‌های ناصفر بوده و $A_1 A_2 \dots A_{20} = 0$ ، در این صورت

حداکثر مقدار $\sum_{i=1}^{20} \text{rank}(A_i)$ برابر کدام یک است؟

(۱) ۵۰

(۲) ۱۰۰

(۳) ۱۹۰

(۴) ۱۹۹

- ۱۴- اگر x ماتریسی $n \times 1$ روی میدان F باشد آنگاه $\det(I_n + xx^t)$ برابر است با:

(۱) $1 + x^t x$

(۲) $1 - x^t x$

(۳) $(1 + x^t x)^2$

(۴) $(1 - x^t x)^2$

۱۵- فرض کنید A ماتریسی 2×2 است به طوری که $\text{tr}(A) = \frac{1}{2} \det(A)$ ، در این صورت کدام یک از مقادیر زیر

نمی تواند مقدار ویژه A باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) $\frac{1}{2}$

۱۶- اگر $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ و $B \in M_{12}(\mathbb{R})$ و $\det(A) = 2$ و $\det(B) = 3$ ، در این صورت $\det(A \otimes B)$ برابر است با: (اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ در این صورت $A \otimes B = (a_{ij}b_{kl})$)

(۱) $2^{12} 3^{10}$

(۲) $2^{10} 3^{12}$

(۳) 6^{10}

(۴) 12^{10}

۱۷- فرض کنید G یک گروه ساده از مرتبه ۱۶۸ باشد. در این صورت تعداد عناصر از مرتبه ۷ در گروه G برابر

است با:

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۲۴

(۴) ۴۸

۱۸- فرض کنید G گروه ماتریس های 2×2 با دترمینان ۱ و با درایه های حقیقی است. کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

(۱) G گروهی ساده است.

(۲) مرکز گروه G بدیهی است.

(۳) G بیش از یک زیرگروه از مرتبه ۲ دارد.

(۴) G دارای نامتناهی عضو مرتبه متناهی است.

۱۹- فرض کنید G گروهی متناهی است که برای هر زیرگروه دوری مانند H از G داریم $\frac{N_G(H)}{C_G(H)} = |\text{Aut}(H)|$

در این صورت :

(۱) اگر عدد اول p مرتبه گروه را عاد کند آنگاه $p(p-1) \mid |G|$

(۲) هر زیرگروه دوری در G نرمال است.

(۳) G گروهی آبلی است.

(۴) G گروهی از مرتبه فرد است.

۲۰- چند جمله‌ای $f(x) = 3 + 2x + 4x^2 \in \mathbb{Z}_8[x]$

(۱) خود توان است.

(۲) مقسوم علیه صفر است.

(۳) وارون پذیر است.

(۴) پوچ توان است.

۲۱- کدام گزینه در مورد حلقه $\frac{\mathbb{Z}[x]}{(2x-1)}$ درست است؟

(۱) با حلقه $\left\{ f\left(\frac{1}{2}\right) \mid f(x) \in \mathbb{Z}[x] \right\}$ یکرخت است.

(۲) با حلقه $\mathbb{Z}_2$ یکرخت است.

(۳) با حلقه $\mathbb{Z}$ یکرخت است.

(۴) میدان است.

در تمامی سؤال‌های زیر حلقه‌ها یک‌دار و مدول‌ها یکانی می‌باشند.

۲۲- فرض کنید F یک گروه آزاد غیر آبدی باشد. در این صورت:

(۱) عنصری غیر بدیهی در F با مرتبه متناهی وجود دارد.

(۲) عنصری غیر بدیهی در F وجود دارد که مرکز ساز آن غیر دوری است.

(۳) عنصری غیر بدیهی در F وجود دارد که مرکز ساز آن غیر آبدی است.

(۴) $C_F(a)$ که $a \in F$ و $a \neq 1$ ، گروهی دوری است.

۲۳- گروه $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ با کدام گروه یکرخت است؟

(۱) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

(۲) $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

(۳) $\mathbb{R}$

(۴) $\mathbb{Q}$

۲۴- فرض کنید که $\varphi: M \rightarrow F$ یک R - همریختی پوشا باشد که در آن F آزاد است. در این صورت کدام

گزینه صحیح است؟

(۱) M پروژکتیو (تصویری) است اگر و تنها اگر $\ker \varphi$ پروژکتیو باشد.

(۲) اگر $\ker \varphi$ پروژکتیو باشد آنگاه M پروژکتیو است ولی برعکس درست نیست.

(۳) اگر M پروژکتیو باشد آنگاه $\ker \varphi$ پروژکتیو است ولی برعکس درست نیست.

(۴) هیچ ارتباطی بین پروژکتیو بودن M و $\ker \varphi$ وجود ندارد.

دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

بزرگترین سایت ریاضی

<http://IRmath.com>

@IRmath

۲۵- فرض کنید F یک میدان بوده و $R = M_p(F)$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) یک مدول روی R وجود دارد که نه تصویری است و نه تزریقی (انژکتیو)
- (۲) هر مدول روی R هم تزریقی (انژکتیو) است و هم تصویری است.
- (۳) یک مدول روی R وجود دارد بطوری که تصویری است ولی تزریقی (انژکتیو) نیست.
- (۴) یک مدول روی R وجود دارد بطوری که تزریقی (انژکتیو) است ولی تصویری نیست.

۲۶- تعداد حلقه‌های ۸ عضوی، که عضو پوچ توان ناصفر ندارند، برابر است با:

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۲۷- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$ به عنوان $-\mathbb{Z}$ مدول تصویری است.
- (۲) $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$ به عنوان $-\mathbb{Z}$ مدول انژکتیو است.
- (۳) فرض کنید $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ، $\phi(x) = 2x$ ، در این صورت $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ یک به یک $1 \otimes \phi$ است.

- (۴) فرض کنید $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ، $\phi(x) = 2x$ ، در این صورت $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ $1 \otimes \phi$ پوشا است.

۲۸- فرض کنید $R = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}$ و M یک R -مدول با تولید متناهی است و $I = \{(a, 0) \mid a \in \{0, 2, 4, 6\}\}$.

چنانچه $f: M \rightarrow N$ یک R -مدول همریختی و $\bar{f}: \frac{M}{IM} \rightarrow \frac{N}{IN}$ با ضابطه $\bar{f}(m + IM) = f(m) + IN$ داریم:

- (۱) اگر $\bar{f}$ یک به یک باشد آنگاه f نیز یک به یک است.
- (۲) اگر $\bar{f}$ یکرختی باشد آنگاه f نیز چنین است.
- (۳) اگر $\bar{f}$ پوشا باشد آنگاه f نیز پوشاست.
- (۴) $\bar{f}$ خوش تعریف نمی‌باشد.

۲۹- فرض کنید همریختی مدولی $f: M \rightarrow N$ دارای این خاصیت است: به ازای هر R - همریختی

$g: N \rightarrow M$ داریم $f \circ g = f$. که در آن M و N -مدول هستند. در این صورت:

- (۱) $\ker f$ یک جمعوند مستقیم M است.
- (۲) $\ker f \cong M$
- (۳) M و N یکرخت نمی‌باشند.
- (۴) $M \cong N$

۳۰- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است با این خاصیت که هر $R -$ مدول آزاد M تمام زیر مدولهایش نیز آزادند. در این صورت کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

(۱) هر $R -$ مدول انژکتیو (تزریقی) است.

(۲) R یک حوزه ایده‌آل اصلی است.

(۳) هر $R -$ مدول تصویری است.

(۴) R یک میدان است.

۳۱- فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد به طوری که هر ایده‌آل ماکسیمال آن به صورت (e) است که

$$e^2 = e. \text{ کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟}$$

(۱) اگر $a \notin \{0, 1\}$ و a خودتوان باشد آنگاه (a) ایده‌آل ماکسیمال است.

(۲) $R \cong R_1 \times R_2$ که R_1 و R_2 حلقه هستند.

(۳) خودتوانی مانند a وجود دارد که $\frac{R}{\text{Ann}(a)}$ میدان است.

(۴) خودتوانی مانند a وجود دارد که $\frac{R}{\text{Ann}(1-a)}$ میدان است.

۳۲- فرض کنید M یک $R -$ مدول باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) $R -$ مدول N و $R -$ مدول تصویری P وجود دارد که $\frac{N}{P} \cong M$.

(۲) $R -$ مدول N و $R -$ مدول تصویری P وجود دارد که $\frac{P}{N} \cong M$.

(۳) $R -$ مدول N و $R -$ مدول انژکتیو I وجود دارد که $\frac{I}{N} \cong M$.

(۴) $R -$ مدول N و $R -$ مدول انژکتیو I وجود دارد که $\frac{N}{I} \cong M$.

۳۳- کدام گزینه در مورد $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i} \right)$ صحیح است؟

(۱) با $\mathbb{Q} \times G$ یکرخت است که G یک گروه دوری است.

(۲) $\mathbb{Z} -$ مدولی یک عضوی است.

(۳) ناصفر است.

(۴) با $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p_i})$ یکرخت است.

۳۴- کدام گزینه برای هر مجموعه اندازه پذیر $E \subseteq [0, 1]$ درست است؟ (m اندازه لبگ است و E° و $\bar{E}$ به ترتیب درون و بستار E هستند.)

(۱) اگر $m(E) > 0$ آنگاه $(\bar{E})^\circ \neq \emptyset$.

(۲) اگر $m(E) = 1$ آنگاه $\bar{E} = [0, 1]$.

(۳) اگر $m(E) = 1$ آنگاه $E^\circ \neq \emptyset$.

(۴) اگر $m(E) = 0$ آنگاه E نقطه حدى ندارد.

۳۵- اگر μ اندازه مثبت روی σ -جبر M باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(۲) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر دو بدو مجزا باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(۳) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای تودرتو و صعودی از مجموعه‌های اندازه پذیر باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

(۴) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای تودرتو و نزولی از مجموعه‌های اندازه پذیر باشد و $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

۳۶- اگر (X, M, μ) یک فضای اندازه و f و g توابعی حقیقی بر X باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $|f|$ اندازه پذیر باشد، آنگاه f اندازه پذیر است.

(۲) اگر f^n برای هر $n > 4$ اندازه پذیر باشد، آنگاه f اندازه پذیر است.

(۳) اگر $f + g$ اندازه پذیر باشد، آنگاه $f - g$ اندازه پذیر است.

(۴) اگر fg اندازه پذیر باشد، و g در هیچ نقطه‌ای صفر نشود، $\frac{f}{g}$ اندازه پذیر است.

۳۷- کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ و برای هر $x \in \mathbb{Q}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ ، $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E$ اندازه پذیر لبگ باشد، آنگاه E اندازه پذیر لبگ است.

(۲) اگر $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ خانواده‌ای از توابع اندازه پذیر لبگ باشد آنگاه $\sup_\alpha f_\alpha$ اندازه پذیر است.

(۳) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تنها در دو نقطه ناپیوسته باشد، آنگاه f با تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ تقریباً همه جا برابر است.

(۴) خانواده‌ای نامشمار از زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ با اندازه لبگ ناصفر دو بدو مجزا وجود دارد.

۳۸- کدام یک از گزینه‌های زیر به ازای هر تابع نامنفی و انتگرال پذیر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و هر $\alpha > 0$ برقرار است؟ (m) اندازه لبگ است و $(E = \{x: f(x) > \alpha\})$

$$m(E) \geq \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (۱)$$

$$m(E) \leq \alpha \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (۲)$$

$$m(E) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (۳)$$

$$m(E) \leq \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (۴)$$

۳۹- فرض کنیم n عددی طبیعی، $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ، μ اندازه شمارشی روی مجموعه توان $P(X)$ و اندازه ν

روی $P(X)$ به صورت $(E \subseteq X)$ $\nu(E) = \begin{cases} 1 & n \in E \\ 0 & n \notin E \end{cases}$ تعریف شده باشد، اگر تابع $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ با

دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

ضابطه $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ تعریف شود، مقدار انتگرال $\int_X f d(\mu + \nu)$ کدام است؟
سایت ریاضیات ایران

$$\frac{n^2 + 1}{n(n+1)} \quad (۱)$$

$$\frac{n}{n+1} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \quad (۳)$$

$$(۴) \text{ صفر}$$

۴۰- اگر (X, M, μ) یک فضای اندازه و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال پذیر نامنفی روی X و f تابعی انتگرال پذیر و نامنفی روی X باشد، کدام گزینه نادرست است؟

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \quad (۱)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu \quad (۲)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \text{ آنگاه } f_n \rightarrow f \text{ نقطه‌ای روی } X \text{ آنگاه} \quad (۳)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \text{ آنگاه } f_n \rightarrow f \text{ به طور یکنواخت روی } X \text{ آنگاه} \quad (۴)$$

۴۱- اگر $f_n(x) = \frac{1 - \cos(x^n)}{x^{2n}}$ برای $x > 0$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n dm$ کدام است؟ (m اندازه لبگ است).

$$(۱) 0$$

$$(۲) 1$$

$$(۳) \frac{1}{2}$$

$$(۴) +\infty$$

بزرگترین سایت ریاضی

<http://IRmath.com>

@IRmath

۴۲- فرض کنیم (X, Σ, μ) یک فضای اندازه متناهی، $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هایی از توابع اندازه‌پذیر f و g

توابعی اندازه‌پذیر بر X باشند. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $f_n \rightarrow f$ در اندازه و $g_n \rightarrow g$ در اندازه آنگاه $\max\{f_n, g_n\} \rightarrow \max\{f, g\}$ در اندازه.

(۲) اگر $f_n \rightarrow f$ در اندازه و $g_n \rightarrow g$ در اندازه آنگاه $f_n g_n \rightarrow f g$ در اندازه.

(۳) اگر $f_n \rightarrow f$ در اندازه آنگاه هر زیر دنباله از $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا به f میل می‌کند.

(۴) اگر $f_n \rightarrow f$ تقریباً همه‌جا آنگاه $f_n \rightarrow f$ در اندازه.

۴۳- اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر لبگ روی $[0, 1]$ و f تابعی انتگرال‌پذیر لبگ روی $[0, 1]$ باشد، کدام

گزینه درست است؟ (m اندازه لبگ است).

(۱) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ تقریباً همه‌جا کراندار است.

(۲) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^2 dm = 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$.

(۳) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$ آنگاه $f_n \rightarrow f$ تقریباً همه‌جا.

(۴) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^2 dm = 0$.

۴۴- فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ و $T: X \rightarrow Y$ عملگری خطی و کراندار با برد چگال در Y باشد به طوری

که برای هر $x \in X$ که $\|x\| = 1$ ، $\|Tx\| \geq 1$. کدام گزینه درست است؟

(۱) T پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.

(۲) T یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست.

(۳) T دوسویی است و $\|T^{-1}\| \geq 1$.

(۴) T دوسویی است و $\|T^{-1}\| \leq 1$.

۴۵- فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و M و N زیر فضاهای H باشند. در این صورت مجموعه $(M \cap N)^\perp$:

(۱) برابر بستار $M^\perp + N^\perp$ است، هرگاه M و N بسته باشند.

(۲) همواره مشمول در $M^\perp + N^\perp$ است.

(۳) همواره برابر بستار $M^\perp + N^\perp$ است.

(۴) همواره برابر $M^\perp + N^\perp$ است.