

IRmath

انتگرال دو گانه

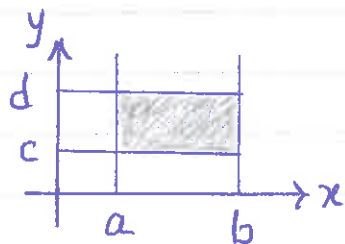
انتگرال مکرر

اگر تابع $f(x, y)$ روی ناحیه $R: [a, b] \times [c, d]$ کرانه دار باشد، آنگاه

$$\text{انتگرال} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx \quad \text{بر انتگرال مکرر تابع } f$$

روی IR می‌نامیم

روش حل انتگرال مکرر



الف) ناحیه انتگرال گیری مستطیل باشد $[a, b] \times [c, d]$

۱- در انتگرال $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ ، ابتدا با ثابت فرض نموده و اقدام به

محاسبه $\int_a^b f(x, y) dx$ می‌نمایم. سپس از حاصل این انتگرال که طبعا تابعی

بر حسب y خواهد بود یعنی $f(y)$ ، بر حسب y در ناحیه $[c, d]$ انتگرال می‌گیریم.

مثال: انتگرال مکرر $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^e \frac{\sin y}{x} dx dy$ را حل کنید

حل: ابتدا انتگرال $\int_1^e \frac{\sin y}{x} dx$ را حل می‌نمایم یعنی:

$$\int_1^e \frac{\sin y}{x} dx = (\sin y) \ln x \Big|_1^e = \sin y [\ln e - \ln 1] = \sin y$$

بنابراین:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^e \frac{\sin y}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy = [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

۲- در انتگرال $\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$ ، ابتدا x را ثابت فرض نموده و اقدام به محاسبه $\int_c^d f(x,y) dy$ می‌کنایم. سپس از حاصل این انتگرال به طبع تابعی بر حسب x خواهد بود یعنی $g(x)$ ، بر حسب x در فاصله $[a,b]$ انتگرال می‌گیریم.

مثال - انتگرال مکرر $\int_1^{\ln 2} \int_1^{\ln 5} e^{2x+y} dy dx$ را حل کنید

حل: ابتدا انتگرال $\int_1^{\ln 5} e^{2x+y} dy$ را حل می‌کنایم

$$\int_1^{\ln 5} e^{2x+y} dy = [e^{2x+y}]_1^{\ln 5} = e^{2x+\ln 5} - e^{2x+1}$$

از طرفی می‌دانیم $e^{2x+\ln 5} = 5e^{2x}$ ، همچنین $e^{2x+1} = e^{2x}e$

بنابراین:

$$\int_1^{\ln 5} e^{2x+y} dy = (5-e)e^{2x}$$

لذا خواهیم داشت

$$\int_0^{\ln 2} \int_1^{\ln 5} e^{2x+y} dy dx = \int_0^{\ln 2} (5-e)e^{2x} dx = \left(\frac{5-e}{2}\right) [e^{2x}]_0^{\ln 2}$$

$$= \left(\frac{5-e}{2}\right) (e^{2\ln 2} - e^0) = \frac{3(5-e)}{2}$$

حال پس از فراگیری انتگرال مکرر در روش حل آن مواردی که بایستی در تقسیم حدود انتگرال ها دقت به رعایت گردد را ذکر می‌کنیم.

بیم محاسبه انتگرال دو گانه در حالت کلی

۱- اگر متغیر اولین انتگرال (انتگرالی که در مرحله دوم محاسبه می‌گردد) را به x

اختصاص داده ایم، کمترین مقدار عددی x را در حد پایین و بیشترین مقدار

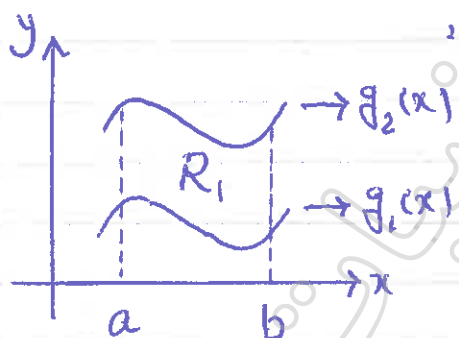
عددی x را در حد بالای اولین انتگرال می‌نویسیم، برای انتگرال دوم از معادله

خطی که از پاشن ناحیه را محدود می‌کند، y را بر حسب x محاسبه نموده و در حد

پاشن انتگرال دوم نوشته و از معادله خطی که ناحیه را از بالا محدود می‌کند مقدار

y را بر حسب x محاسبه و در حد بالای انتگرال دوم مکرر می‌دهیم.

به این نوع ناحیه، ناحیه اول می‌گوئیم.



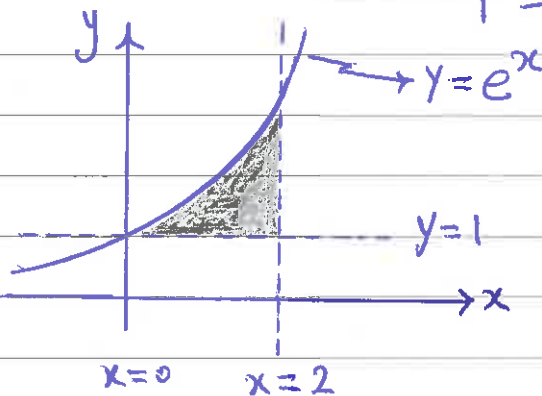
$$a \leq x \leq b \quad \& \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

اگر P روی R_1 نوشته و نامی باشد

$$\iint_{R_1} f(x,y) dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right] dx \quad \text{آنگاه:}$$

مثال: در انتگرال دو گانه $\iint_R f(x,y) dA$ محدود کننده انتگرال گیری را به ترتیبی بنویسید که R بین منحنی‌های $y=1$ و $y=e^x$ و $x=2$ می باشد.

حل: ابتدا شکل ناحیه R را رسم می‌کنیم



بنابراین:

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y) dy dx$$

۲- اگر متغیر اولین انتگرال را به y اختصاص داده‌ایم، گزین متغیر عددی

y را محاسبه کرده و در حد پایین انتگرال اول قرار می‌دهیم و بیشترین متغیر عددی

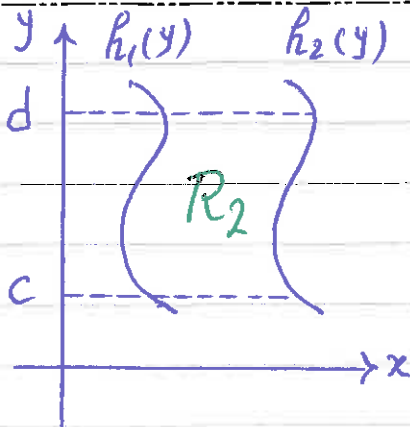
x را در حد بالای اولین انتگرال می‌نویسیم. برای انتگرال دوم x را از معادله

خطی که ناحیه را از سمت چپ می‌پوشاند بررسی می‌کنیم و حساب کرده و در حد

پایین انتگرال دوم و حد بالای انتگرال دوم اختصاص به متغیر y می‌دهیم.

از معادله خطی بدست می‌آوریم که ناحیه را از سمت راست محدود می‌کند

به این نوع ناحیه، ناحیه در x می‌گوئیم.



$$c \leq y \leq d \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

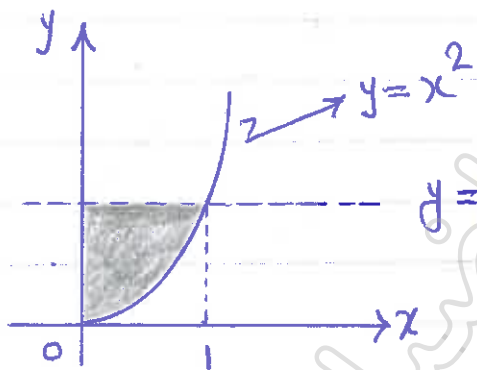
اگر f روی R_2 پیوسته و نامنفی باشد

$$\iint_{R_2} f(x,y) dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx \right] dy$$

آنگاه

مثال: در انتگرال دو گانه $\iint_R f(x,y) dA$ محدود کنش را به ترتیبی بنویسید که R قطعه سهمیگون محدود به منحنی‌های $y=1$ ، $y=x^2$ باشد و $x \geq 0$

حل: ابتدا ناحیه R را رسم می‌کنیم



بنابراین:

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) dx dy$$

تغویض ترتیب انتگرال گیری

گاهی اوقات انتگرال محدود دارای محدودی می‌باشد که نمی‌توان از ناحیه انتگرال ده در آن محدود انتگرال گیری نمود و یا اینکه نحوه انتگرال گیری بسیار دشوار می‌گردد

بنابراین دلیلی با تغییر جزئیات بیشتر از حساب ریاضیات ایران <http://irmath.com> به تفصیل را به همراه