

تعریف . فرض کنیم که X یک مجموعه نامتناهی باشد ، تابع $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ را یک متریک

گوییم هرگاه :

$$1- \forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$$

$$2- \forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$3- \forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$4- \forall x, y \in X \quad \text{if } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

مثال . روی $\mathbb{R}$ تابع $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ، ضابطه $d(x, y) = |x - y|$ یک متریک است که به متریک اقلیدسی معروف می باشد

مثال . روی $\mathbb{R}$ تابع $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ، ضابطه ذیل یک متریک است که به متریک مسافت

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

معروف می باشد .

مثال . روی $\mathbb{R}^n$ بطوریکه $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ تابع

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ ، ضابطه ذیل یک متریک است .

$$I) \quad d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$$

$$II) \quad d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \max \{ |x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n| \}$$

$$III) \quad d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

مثال . نشان دهید که متریک گسسته خواص متریک را داراست .

حل : خواص ۲ بهیچیک است ، کافیست که خاصیت نامساوی مثلثی را بررسی کنیم

$$d(p, q) = \begin{cases} 1 & p \neq q \\ 0 & p = q \end{cases}$$

if $p = r \Rightarrow d(p, r) = 0 \leq d(p, q) + d(q, r)$ since $d(p, r) = 0$

let $p \neq r \Rightarrow \begin{cases} p = q, q \neq r \Rightarrow d(p, r) = 1 \leq 0 + d(q, r) \rightarrow 1 \leq 0 + 1 \\ p \neq q, q = r \Rightarrow d(p, r) = 1 \leq d(p, q) + 0 \rightarrow 1 \leq 1 + 0 \\ p \neq q \neq r \Rightarrow d(p, r) = 1 \leq d(p, q) + d(q, r) \rightarrow 1 \leq 1 + 1 \end{cases}$

مثال . با توجه به اینکه $d(x, y)$ متریک X می باشد ، نشان دهید که

$$d_1(x, y) = \ln(1 + d(x, y))$$

متریک X است .

I) $d_1(x, y) \geq 0$ حل :

$$d(x, y) \geq 0 \Rightarrow 1 + d(x, y) \geq 1 \Rightarrow \ln(1 + d(x, y)) \geq 0 \Rightarrow d_1(x, y) \geq 0$$

II) $d_1(x, y) = d_1(y, x)$

III) $d_1(x, y) = 0 \Rightarrow 1 + d(x, y) = 1 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

IV) $d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y)$ حکم :

$$\ln(1 + d(x, y)) \leq \ln(1 + d(x, z)) + \ln(1 + d(z, y))$$

$$\ln(1+d(x,y)) \leq \ln(1+d(x,z)) + \ln(1+d(z,y))$$

$$1+d(x,y) \leq 1+d(x,z) + d(z,y) + d(x,z)d(z,y)$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) + d(x,z)d(z,y)$$

نمادگذاری: هرگاه تابع $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک متر باشد نگاه زوج (X, d)

را یک فضای متریک گوئیم. چون X ساختاری ندارد پس چهار عمل اصلی روی آن بررسی نمی گردد.

تعریف: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد در اینصورت همسایگی مرکز

$x \in X$ شعاع $r > 0$ را با نماد $N_r(x)$ یا $N(x, r)$ نشان داده و

بصورت ذیل تعریف می کنیم.

$$N_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

مثال: با فرض بر اینکه $X = \mathbb{R}$ و $d(x, y) = |x - y|$ همسایگی به مرکز $x = \frac{1}{2}$ و شعاع

$r = \frac{1}{4}$ را بنویسید.

$$N_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}) = \{x \in X \mid d(x, y) < r\} = \{x \in X \mid d(\frac{1}{2}, x) < \frac{1}{4}\}$$

$$= \{x \in X \mid |\frac{1}{2} - x| < \frac{1}{4}\} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$$

مثال: با فرض بر اینکه $X = \mathbb{R}$ و $d(x, y)$ متریک گسسته باشد همسایگی به

مرکز $x = 1$ و شعاع $r = \frac{1}{2}$ را بنویسید.

$$N_{\frac{1}{2}}(1) = \left\{ x \in X \mid d(x, 1) < \frac{1}{2} \right\} = \left\{ x \in X \mid d(x, 1) = 0 \right\} \\ = \left\{ x \in X \mid x = 1 \right\} = \{1\}$$

IRmath

مثال. با فرض بر اینکه $X = \mathbb{R}^2$ ، $d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$ ، محاسبی به

مرکز $(0, 0)$ و شعاع $r > 0$ را مشخص نمایید

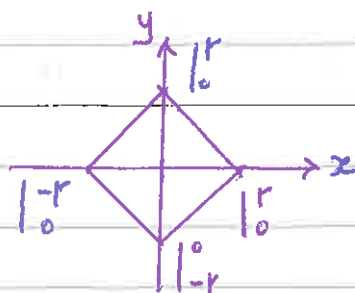
$$N_r(0, 0) = \left\{ y = (y_1, y_2) \mid d(x, y) < r \right\} \quad y \in \mathbb{R}^2 \\ = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid d(0, y) < r \right\} = \left\{ y \mid \sqrt{|0 - y_1|^2 + |0 - y_2|^2} < r \right\} \\ = \left\{ y \mid \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2} < r \right\} \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 < r^2$$

داخل یک دایره به مرکز $(0, 0)$ و شعاع r

مثال. با فرض بر اینکه $X = \mathbb{R}^2$ ، $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ ، محاسبی به

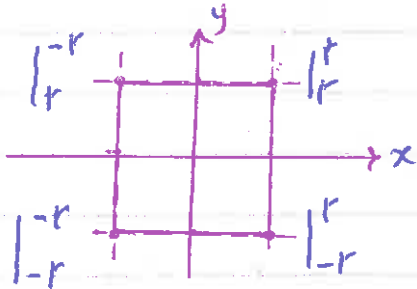
مرکز $(0, 0)$ و شعاع $r > 0$ را مشخص نمایید.

$$N_r(0, 0) = \left\{ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d(0, y) < r \right\} \\ = \left\{ y \mid |0 - y_1| + |0 - y_2| < r \right\} \Rightarrow |y_1| + |y_2| < r$$



مثال - با فرض متریک $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ در $X = \mathbb{R}^2$ همسایگی به مرکز $(0, 0)$ و شعاع $r > 0$ را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} N_r(0, 0) &= \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d(0, y) < r\} \\ &= \{y \mid \max\{|0 - y_1|, |0 - y_2|\} < r\} \\ &= \{y \mid \max\{|y_1|, |y_2|\} < r\} \Rightarrow \begin{cases} |y_1| < r \\ |y_2| < r \end{cases} \end{aligned}$$



مثال - فرض کنیم که x مجزئ به قدر گسسته باشد، مطلوب است مشخص نمودن همسایگی این فضا:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \quad \text{حل : داریم}$$

همسایگی $N_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ را برای $r > 0$ تعیین نموده و برای $r > 0$ حالات زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} \text{a) } 0 < r < 1 &\Rightarrow N_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\} = \{y \in X \mid d(x, y) = 0\} \\ &= \{y \in X \mid y = x\} \Rightarrow N_r(x) = \{x\} \end{aligned}$$

چون $d(x, y) = 0$ فقط با $y = x$ خواهیم داشت $d(x, y) < r$